

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТРАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО
АСТРОНОМИЯ

XI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

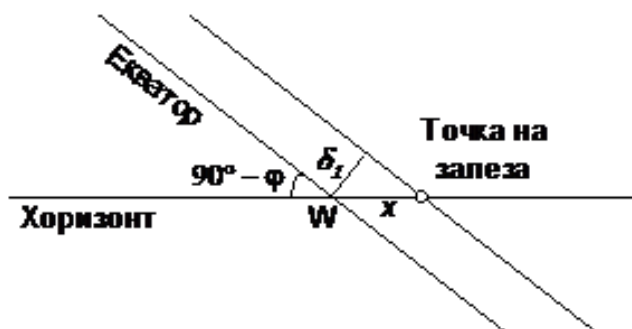
IV кръг
Теоретичен тур

Старша възраст – решения

Задача 1. Изгрев на Слънцето. В един мартенски ден младият астроном Чавдар Дуцов от София ($\varphi = 42^\circ$) наблюдава изгрев на Слънцето точно на изток. Той се опитва да предскаже какъв ще е азимутът на Слънцето в момента на залеза му същия ден. Пресметнете това и вие за два случая – без отчитане и с отчитане на рефракцията.

Решение:

Ако не отчитаме рефракцията, можем да приемем, че по време на изгрева Слънцето е било точно на небесния екватор. Тогава то е имало деклинация $\delta = 0^\circ$. С течение на деня неговата деклинация е нараствала, защото е казано, че денят е от месец март, т.е. това е денят на пролетното равноденствие и Слънцето навлиза в северната небесна полусфера. Средната ъглова скорост на Слънцето по еклиптиката е $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, където $T = 1$ година е орбиталният период на Земята. По време на равноденствие Слънцето се движи под ъгъл $\varepsilon = 23.5^\circ$ спрямо небесния екватор (наклонът на еклиптиката към екватора). Тогава скоростта, с която то си изменя деклинацията, е $\omega_1 \sin \varepsilon$. Можем да считаме, че продължителността на деня е била $t = 12$ h, тъй като деклинацията на Слънцето се е изменила незначително в рамките на този интервал. Оттук следва, че деклинацията му при залеза е $\delta_1 = \omega_1 t = \frac{2\pi}{T} t \sin \varepsilon \approx +11.8'$



Ъгълът, под който екваторът пресича хоризонта в точката запад (W), е $90^\circ - \varphi$. Под този ъгъл изгряват и залязват всички светила за София. Следователно, можем да запишем връзката $\delta_1 = x \sin(90^\circ - \varphi)$, където x е отстоянието на точката на залеза от точката запад по хоризонта. Оттук намираме:

$$x = \frac{\delta_1}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{2\pi t \sin \varepsilon}{T \cos \varphi}$$
$$x \approx 18'$$

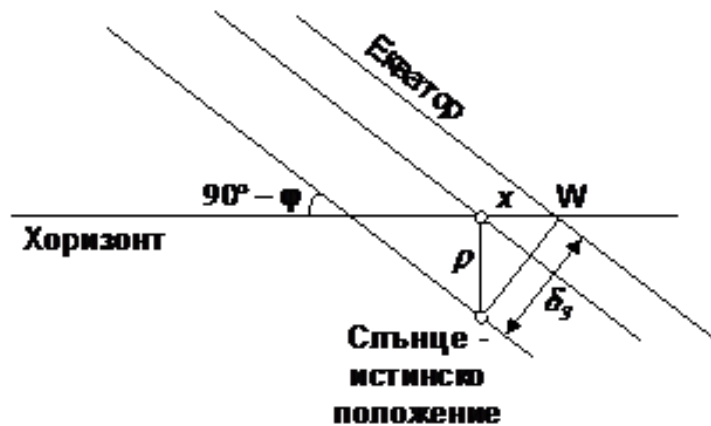
Ако се отчита рефракцията, трябва да се има предвид, че при изгрева деклинацията на Слънцето не е 0° . На фигурата е показана схема на изгрева на Слънцето. В момента на изгрева то в действителност се намира на определена дълбочина под хоризонта, която е равна на ъгъла на рефракция $\rho = 35'$.



От чертежа се вижда, че деклинацията на Слънцето тогава е била $\delta_2 = -\rho \sin \varphi \approx -23.5'$. Тук отново ще считаме, че денят продължава $t = 12 \text{ h}$ време. Следователно, деклинацията на Слънцето при залеза ще е:

$$\delta_3 = \delta_2 + \omega_1 t = \delta_2 + \frac{2\pi}{T} t \sin \varepsilon \approx 5.5'$$

На следващия чертеж е показана схемата на залеза:



Слънцето залязва когато височината му под хоризонта е равна на r . Деклинацията на Слънцето ще се е повишила с ρ . Деклинацията на Слънцето ще се е повишила с $\Delta\delta = \rho \sin \varphi = 23.4'$. Аналогично на първия случай намираме отстоянието на точката на залеза от точката запад:

$$x = \frac{\delta_3 + \Delta\delta}{\sin(90^\circ - \varphi)} \approx 26'$$

Тук също точката на залез ще е южно от точката запад.

Задача 2. Пепелна светлина. Сравнете звездните величини, които се създават от пепелната светлина на Луната в новолуние за земния наблюдател и на Земята в “новоземие” за лунния наблюдател. Не отчитайте светенето на земната атмосфера и светенето на тънките сърпове на двете тела при тези фази.

Решение:

Нека с E_0 означим осветеността, която Слънцето създава върху Земята (тя е практически същата като осветеността върху Луната). Потокът слънчева светлина, попадащ върху Земята, ще бъде:

$$\Phi_T = E_0 \pi R_T^2$$

където R_T е радиусът на Земята. Ако A_T е отражателната способност на Земята, то количеството отразена от нея слънчева светлина ще бъде:

$$W_T = A_T \Phi_T$$

Отразената от Земята слънчева светлина ще създава върху Луната осветеност:

$$E_T = W_T / 2\pi r^2$$

където r е разстоянието от Земята до Луната. Потокът земна светлина, попадащ върху Луната, ще бъде:

$$\Phi_{TL} = E_T \pi R_L^2$$

Така Луната ще създава осветеност на Земята, която ще бъде:

$$E_{TL} = W_{TL} / 2\pi r^2$$

$$E_{TL} = A_L A_T E_0 R_L^2 R_T^2 / 4r^2$$

Това е блясъкът на пепелната светлина на Луната.

По аналогичен начин можем да получим осветеността E_{LT} , която Земята създава върху Луната, преотразявайки отразената от Луната слънчева светлина. При това се убеждаваме, че $E_{TL} = E_{LT}$. Пепелната светлина от Земята, получена върху Луната е еднаква по блясък с пепелната светлина на Луната за земния наблюдател.

Задача 3. Интерферометрия на звезда. С методите на интерферометрията е измерен ъгловият диаметър на звезда, който се оказва $0'',004$. Блясъкът на звездата е 4.7^m . Спектроскопичните наблюдения на тази звезда показват, че жълтата линия на натрия ($5890 \text{ \AA}$) има две компоненти – ярка и слаба, при което дължината на вълната на слабата компонента се променя синусоидално с амплитуда $0,6 \text{ \AA}$ и период 30 години. Един път за целия период слабата линия на натрия престава да се вижда в продължение на 230 дни. Определете разстоянието до звездата, нейната маса и температурата на повърхността ѝ. Към кой тип звезди можем да я причислим?

Решение:

Нека с L да означим светимостта на звездата, а с r разстоянието до нея. Осветеността, която звездата създава за нас е:

$$E = L / 4\pi r^2$$

Светимостта на звездата е:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

където R и T са нейният радиус и температурата ѝ. Оттук получаваме:

$$E = R^2 \sigma T^4 / r^2$$

Понеже видимият ъглов диаметър на звездата е $\delta = 2R/r$, то:

$$E = \delta^2 \sigma T^4 / 4$$

Знаем слънчевата константа $E_0 = 1370 \text{ W/m}^2$ и видимата звездна величина на Слънцето $m_0 = -26.8^m$. Ако $m = 4.7^m$ е дадената ни звездна величина на звездата, то:

$$E = E_0 \cdot 2.512^{m_0 - m}$$

Така за температурата получаваме:

$$T = \sqrt[4]{\frac{4E}{\delta^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{4E_0 \cdot 2.512^{m_0 - m}}{\delta^2 \sigma}}$$

$$T \approx 2700 \text{ K}$$

Ярката компонента на спектралната линия принадлежи на самата звезда, а слабата на нейн спътник, имащ много по-малка светимост от нея. Изменението на слабата линия се дължи на орбителното движение на спътника около звездата. Амплитудата на промяната на дължината на вълната съответства на максималната стойност v на лъчевата скорост на спътника. Означаваме тази амплитуда с $\Delta\lambda$, с λ_0 – лабораторната дължина на вълната, а

с c – скоростта на светлината. Съгласно формулата за изменението на дължината на вълната поради ефекта на Доплер при движение на източника със скорост v :

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c \approx 30.5 \text{ km/s}$$

Тъй като дължината на вълната на слабата спектрална линия се изменя синусоидално, можем да предположим, че спътникът има кръгова орбита около звездата и да приемем, че зрителният лъч от нас към нея лежи приблизително в орбиталната равнина на спътника. Така че можем да считаме v за равна на орбиталната скорост на спътника около звездата. Слабата линия периодично изчезва за време $t = 230 \text{ d}$. Това става, когато спътникът преминава зад звездата и всъщност изминава нейния диаметър D . Оттук намираме:

$$D = vt \approx 600 \times 10^6 \text{ km}$$

Като знаем видимия ъглов диаметър на звездата, намираме разстоянието до нея:

$$r = \frac{D}{\delta} \approx 1 \text{ kpc}$$

От разстоянието и видимата звездна величина на звездата намираме абсолютната ѝ звездна величина:

$$M = m + 5 - 5 \lg r = -5.3^m$$

Звездата има неимоверно висока светимост и много ниска температура. Следователно, тя е огромен и хладен червен гигант.

За да намерим масата M_* на звездата, използваме III закон на Кеплер. Заяписваме закона за случая, когато радиусът a на орбитата на спътника се измерва в астрономически единици, неговият орбитален период P в години (по условие $P = 30$ години), а масата на звездата – в слънчеви маси:

$$\frac{a^3}{P^2} = M_*$$

Радиуса на орбитата намираме от съотношението:

$$a = \frac{vP}{2\pi} = 30 \text{ AU}$$

Накрая за масата получаваме:

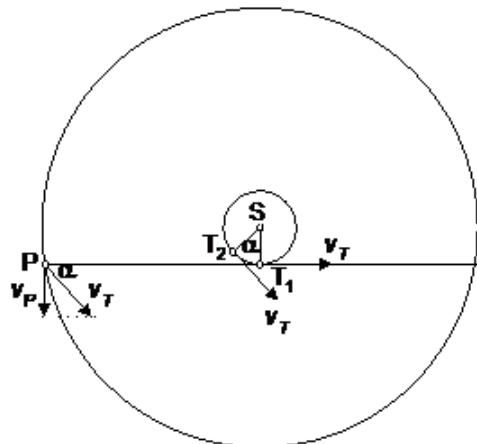
$$M_* = \frac{a^3}{P^2} \approx 30 M_{\odot}$$

Задача 4. Точка на стоене. Участникът в Международната олимпиада по астрономия и бъдещ астроном Александър Куртенков ви кани да споделите с него удоволствието от едно теоретично изследване. Той е забелязал, че моментът, в който една външна планета е в квадратура, не съвпада точно с момента, в който става преходът на планетата между право и обратно видимо движение. Намерете разликата между тези два близки момента от време като функция на радиуса на планетната орбита около Слънцето. Изведете приблизителна формула само за случая, когато планетата е много отдалечена от Слънцето.

Решение:

На фигурата с S е означено положението на Слънцето, с T_1 – положението на Земята и с P – положението на външна планета в квадратура.

Когато далечна планета се намира в квадратура, нейната скорост v_P е приблизително перпендикулярна на земната орбитална скорост v_T (Земята в положение T_1). Но тогава



планетата няма да е в точката на стоене. Ъгловата скорост на видимото ѝ движение по небесната сфера няма да е нула. Тя ще стане нула, когато Земята е в малко по-друго положение (T_2) – такова, че компонентата на земната линейна скорост по направление на движението на планетата да стане равна на орбиталната скорост на планетата. Тогава “напречната” скорост на относително движение на планетата спрямо Земята (по направление перпендикулярно на зрителния лъч за земен наблюдател) ще стане нула.

Използваме приближението, че поради голямата отдалеченост на планетата ъгълът Земя – планета – Слънце е много малък. По същото съображение пренебрегваме движението на планетата по нейната орбита между моментите, когато Земята е в положение T_2 и T_1 . Моментът на стоене на планетата може да се случи малко преди или малко след момента, когато тя е в квадратура. За определеност разглеждаме случая, в който моментът на стоене настъпва малко преди квадратурата. Нека Земята, намираща се в точка T_2 , е отклонена на ъгъл α по своята орбита спрямо положението си T_1 , когато външната планета е в квадратура. Нейната скорост v_T тогава сключва същия ъгъл с линията T_1P . Смятаме, че скоростта на планетата v_P в този момент е приблизително перпендикулярна на линията T_1P . Така можем да напишем:

$$\sin \alpha \approx \alpha = v_P / v_T$$

Търсеният от нас интервал от време между моментите, когато Земята е в T_1 и T_{21} , ще бъде:

$$\Delta t = \frac{\alpha}{2\pi} T_T = \frac{1}{2\pi} \frac{v_P}{v_T} T_T$$

където T_T е орбиталният период на Земята около Слънцето, равен на 1 година. Ако r_T и r_P са радиусите на орбитите на Земята и на планетата, а T_P е орбиталният период на планетата:

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{2\pi r_T}{T_T} \\ v_P &= \frac{2\pi r_P}{T_P} \\ \Delta t &= \frac{\alpha}{2\pi} T_T = \frac{1}{2\pi} \frac{r_P}{r_T} \frac{T_T^2}{T_P} \end{aligned}$$

Съгласно третия закон на Кеплер:

$$\begin{aligned} \frac{r_P^3}{r_T^3} &= \frac{T_P^2}{T_T^2} \\ T_P &= T_T \sqrt{\frac{r_P^3}{r_T^3}} \end{aligned}$$

Следователно:

$$\Delta t = \frac{T_T}{2\pi} \sqrt{\frac{r_P}{r_T}}$$

Ако r_P е в астрономически единици, а t е в години:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{2\pi\sqrt{r_P}} \text{ yr} \\ \Delta t &\approx \frac{58.44}{\sqrt{r_P}} \text{ d} \end{aligned}$$

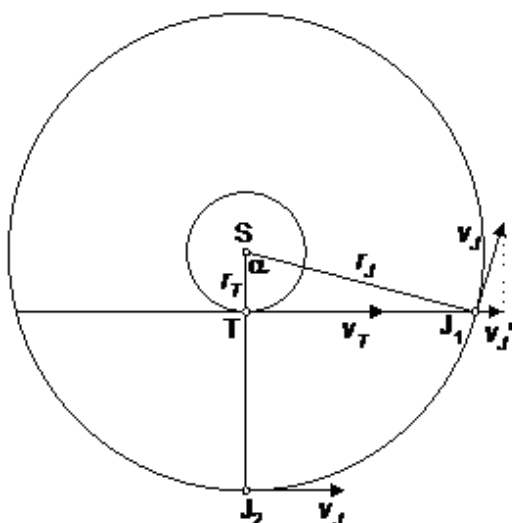
Задача 5. Лъчеви скорости. През първата половина на май 2003 г., в малка област на небето, са проведени спектрални наблюдения и са получени следните максимални стойности на лъчевите скорости: 44,8 км/с, 41,2 км/с, 38,4 км/с, 35,7 км/с, 40.1 км/с и 14.9 км/с. След три години в първата половина на юни са проведени отново набдения на същия обект, но резултатите се оказват различни: 17,3 км/с, 13,7 км/с, 10,9 км/с, 8,2 км/с, 12.6 км/с

и -12.6 км/с. Какво са наблюдавали астрономите? Обосновайте своя отговор с пресмятания.

Решение:

Забелязваме, че разликата междулъчевите скорости, измерени в двата момента, е една и съща за всяка от точките (обектите). Не е възможно това да салъчевите скорости, измерени в различни точки от някаква галактика. Типичните скорости на звездите от галактиката са значително по-големи. Дори и да става въпрос за малка галактика, в която звездите не се движат с големи скорости относно нейния център, толъчевите скорости на отделните обекти в нея щяха да съдържат като компоненталъчевата скорост на галактиката като цяло относно нас, която със сигурност би била много по-голяма.

Не е възможно това да салъчевите скорости на някакви звезди в малка област от нашата галактика, защото тогава не би могла да се обясни еднаквата разлика от $27,5$ км/сек, която се получава за двата момента от време. Можем да предположим, че първите четири числа от поредицата салъчевите скорости на планети около друга звезда, а последните две стойности салъчевите скорости на две диаметрално противоположни точки от диска на звездата. Системната разлика от $27,5$ км/сек можем да обясним с хипотезата, че звездата влиза в състава на двойна звездна система и се движи около центъра на масите на системата. Но все още не е възможно да се получат поотделно спектри на две диаметрално противоположни области от видимия диск на звезда. Остава предположението, че това е система от много по-близки обекти в рамките на Слънчевата система. Последните две стойности най-вероятно се отнасят до противоположни точки от видимия диск на въртяща се планета, а първите четири – до орбиталните скорости на нейните спътници. Поради наличието на поне четири спътници, безспорно това е някоя от големите планети – гиганти. Очевидно при второто наблюдение, планетата е имала нулевалъчева скорост. Следователно, тогава тя е била в опозиция. Три години и един месец по-ранолъчевата скорост на планетата е била $+27,5$ км/сек. Тази стойност е близка до орбиталната скорост на Земята, което означава, че планетата тогава е била близо до западна квадратура. Да проверим това за Юпитер.



На чертежа с S сме означили Слънцето, с T – Земята, а с J₁ и J₂ – положения на Юпитер в западна квадратура и в опозиция. Като знаем орбиталните периоди на Земята и Юпитер T_T и T_J , можем да намерим синодичния период на Юпитер:

$$T_{syn} = \frac{T_J T_T}{T_J - T_T} = \frac{12}{11} \text{ yr}$$

$$T_{syn} \approx 1.091 \text{ yr}$$

Известни са ни също и радиусите на орбитите на Земята и Юпитер r_T и r_J , от които можем да пресметнем ъгъла α :

$$\cos \alpha = \frac{r_T}{r_J} \Rightarrow \alpha \approx 79^\circ$$

Периодът от време от западна квадратура до опозиция е:

$$\Delta t = \left(1 - \frac{\alpha}{360^\circ}\right) T_{syn} = 0.852 \text{ yr}$$

От май 2003 година до юни 2006 година са изминали 3 години и 1 месец или приблизително 3.083 години. Това е два пъти синодичния период на Юпитер плюс още 0.9 години, което е приблизително равно на Δt . Следователно планетата е Юпитер. Разликата от 2.5 км/с в орбиталната скорост на Земята идва оттам, че в квадратура Юпитер има такава компонента на скоростта, насочена към нас.

В правилността на предположението за Юпитер се убеждаваме отново, като пресметнем линейната скорост на точки от екватора на планетата, която се оказва близка до 12 км/сек. В същото време от астрономическия алманах пресмятанията показват, че четирите спътници са Йо, Европа, Ганимед и Калисто.